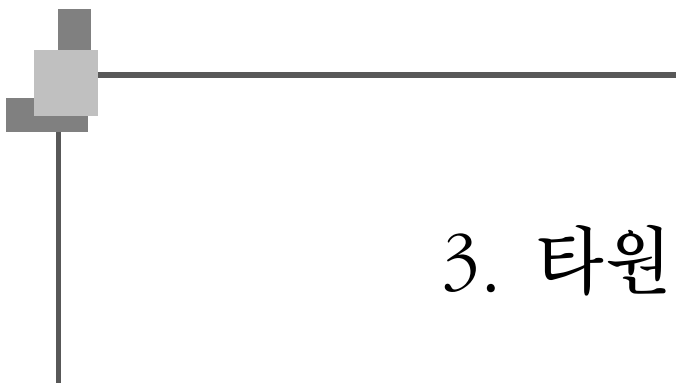
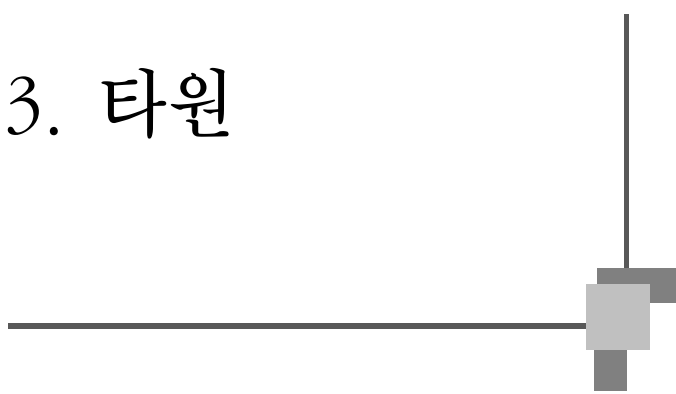




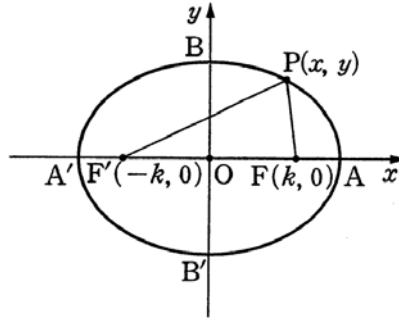
3. 타원



1. 타원의 정의 및 기본 성질

(1) 타원의 정의

두 정점으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 자취



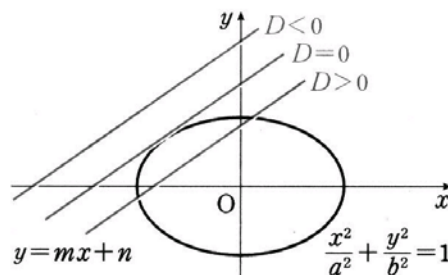
두 정점 F, F' 를 타원의 초점, AA' 을 타원의 장축, BB' 을 타원의 단축, 장축과 단축의 교점 O 를 타원의 중심, 네 점 A, A', B, B' 를 타원의 꼭지점이라 한다.

(2) 타원의 방정식

두 초점 $F(k, 0), F'(-k, 0)$ 으로부터의 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(단, $k^2 = a^2 - b^2$)

(3) 타원에 접하는 접선의 방정식



① 기울기가 m 이고 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 접선의 방정식 $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$

② 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

2. 자취를 통해 본 타원

(1) 타원의 자취 1

한 정직선과 한 정점으로부터 거리의 비가 $1:e$ (단, $e < 1$) 인 점들의 자취는 타원이다.

(증명)

한 정직선 l 을 $x=b$, 한 정점 F 를 $F(a, 0)$ 라 하고 l 과 F 에 이르는 거리의 비가 $1:e$ (단, $e < 1$) 인 점 P 의 자취를 구해보자.

점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면 $|x-b| : \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 1:e$

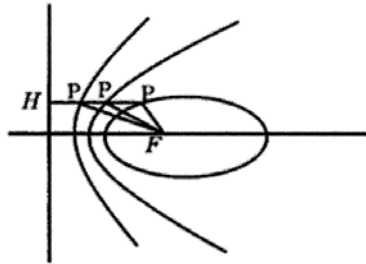
이를 정리하면 $(x-a)^2 + y^2 = e^2(x-b)^2$

$$(1-e^2)x^2 - 2(a-be^2)x + y^2 + a^2 - b^2e^2 = 0$$

그런데 $0 < 1-e^2 < 1$ 이므로 위의 방정식은 $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ ($AB > 0$) 인 타원의 방정식이 된다. <증명 끝>

* 참조(이심률) *

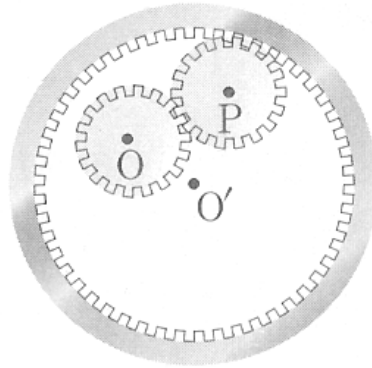
한 정직선에서 한 정점에 이르는 비율을 이심률(離心率, eccentricity)이라 한다. 이심률은 원뿔 곡선이 원에서 벗어나는 정도를 나타낸다고 할 수 있다.



이차곡선은 이심률을 이용하여 정의할 수도 있는데, 이심률을 e 라 하면, 원의 이심률은 0 , 포물선의 이심률은 1 , 타원의 이심률은 $0 < e < 1$, 쌍곡선의 이심률은 $e > 1$ 의 값을 갖게 된다.

(2) 타원의 자취 2

한 원에 내접하고 다른 한 원에 외접하는 원의 중심의 자취는 타원이다.



(증명)

작은 원을 O , 큰 원을 O' , O 의 반지름을 r , O' 의 반지름을 R 이라 하고, 큰 원에 내접하고 작은 원에 외접하는 원의 중심을 P 라 하자.

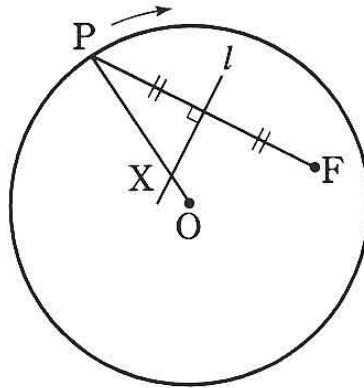
원 P 의 반지름을 x 라 하면 $PO = r + x$, $PO' = R - x$

두 식의 양 변을 더하면 $PO + PO' = R + r$ (상수)

따라서 점 P 의 자취는 점 O 와 O' 를 두 초점으로 하는 타원이 된다. <증명 끝>

(3) 타원의 자취 3

원 O 내부의 한 정점을 F , 원 위의 임의의 점을 P 라 할 때, 선분 PF 의 수직이등분선과 선분 PO 의 교점의 자취는 타원이다.

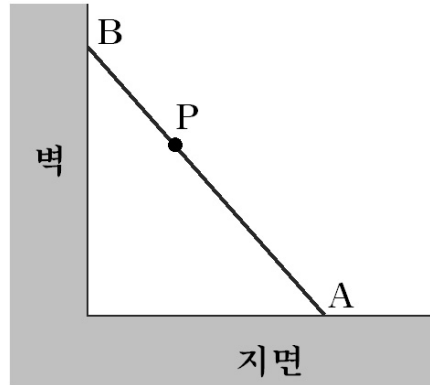


(증명)

원 O 의 반지름을 R , 선분 PF 의 수직이등분선과 선분 PO 의 교점을 X 라 하자. 그러면 $PX = FX$ 이므로 $OP = OX + XP = OX + XF = R$ (일정) 이 성립한다. 즉, 점 X 에서 정점 O 와 정점 F 에 이르는 거리의 합이 일정하다. 따라서 X 의 자취는 타원이다. <증명 끝>

(4) 타원의 자취 4

선분 AB 의 한 점을 x 축, 다른 한 점을 y 축을 따라 이동할 때, 선분 AB 를 $m:n$ (m, n 은 양수)으로 나누는 점의 자취는 타원이다.



(증명)

길이가 l 인 선분 AB 의 한 점 A 가 x 축, 다른 한 점 B 가 y 축을 따라 이동할 때, 선분 AB 를 $1:k$ ($k>0$)로 나누는 점의 자취 P 를 생각해 보자. A 의 좌표를 $A(a, 0)$, B 의 좌표를 $B(0, b)$, P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면,

$$a^2 + b^2 = l^2, \quad x = \frac{ka}{1+k}, \quad y = \frac{b}{1+k} \text{를 만족한다.}$$

a, b 를 소거하고 x, y 에 관한 방정식을 만들면,

$$\frac{(1+k)^2 x^2}{k^2} + (1+k)^2 y^2 = l^2$$

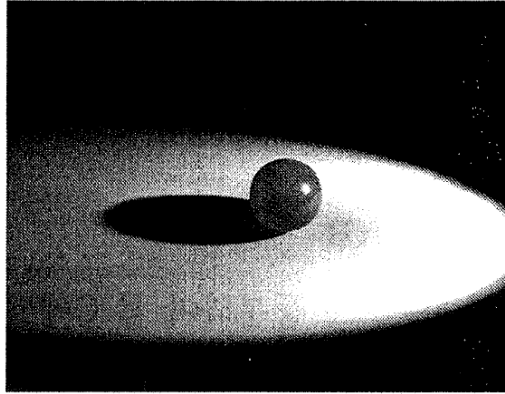
양변을 $(1+k)^2$ 으로 나누면,

$$\frac{x^2}{k^2} + y^2 = \left(\frac{l}{(1+k)} \right)^2 \text{이 성립한다.}$$

따라서 점 X 의 자취는 타원이다.

(5) 타원의 자취 5

그림과 같이 구의 높이보다 높은 위치에서(단, 평면과 수직이 아니다.) 불을 비추면 구의 그림자 모양은 타원이다.



(증명)

반지름은 r 인 구를 좌표공간에 적절히 놓아두자. 중심을 $O(0, 0, r)$, 빛의 위치(구 밖의 한 점)를 $A(a, 0, b)$ (단, $b > 2r, a \neq 0$) 라 하자. 빛의 위치의 y 좌표를 0 으로 놓는 것은 x 축과 평행한 방향으로 빛을 비춘다는 의미이다.

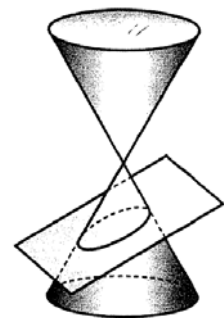
그림자 끝의 임의의 한 점을 $P(x, y, 0)$, $\overrightarrow{AP}$ 가 구와 접하는 점을 B , $\angle PAO = \theta$ 라고 하고, xy 평면에 비추는 구의 그림자를 생각해보자.

일반적으로 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AO}| \cos \theta = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AB}|$ 이 성립하므로

$(x-a, y, -b) \cdot (-a, 0, r-b) = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + (-b)^2} \times \sqrt{(-a)^2 + (r-b)^2 - r^2}$ 가 된다.

이를 정리하면 $(b^2 - 2rb)x^2 + (a^2 + b^2 - 2rb)y^2 + 2abrx - b^2r^2 = 0$ (C, D, E 는 상수)이 되는데, $b > 2r$ 이므로 이는 타원의 일반형 $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ (단, $AB > 0$)의 꼴이다. 따라서 그림자의 모양은 타원이 된다. (평면과 수직인 위치에서 불을 비추면 구의 그림자 모양은 원이 된다.)

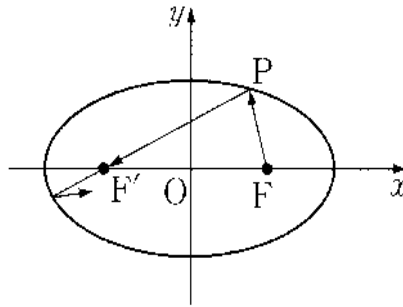
구보다 높은 위치에서 비추는 구의 그림자의 모양이 타원이 되는 것은 원뿔 곡선을 그림과 같이 잘랐을 때 타원이 생기는 것과 같은 이치이다. 빛의 위치는 원뿔의 꼭지점, 그림자가 생기는 면은 원뿔을 자른 면에 대응하게 되는 것이다. <증명 끝>



3. 타원의 기하학적 특성

(1) 타원의 기하학적 특성 1

타원의 한 초점에서 출발한 빛은 타원 위의 한 점에서 반사한 후 다른 초점을 향해 진행한다.



(증명1) 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용한 증명

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 두 초점을 $F(k, 0)$, $F'(-k, 0)$, 타원 위의 임의의 점을

$P(x_1, y_1)$ 라 하자. 그러면 $k^2 = a^2 - b^2$, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 이 성립한다.

점 P 에서의 법선의 방정식을 구하면 $y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$ 이고, 법선의 방정식의 x 절편을

$D(x, 0)$ 이라 하면 $x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1$ 이다. 이 때, $PF' : PF = DF' : DF$ 이 성립함을 보이면 입사각과 반사각이 같으므로 타원의 한 초점을 출발한 빛이 다른 초점을 향해 반사함을 알 수 있다.

$$PF' = \sqrt{(x_1 + k)^2 + y_1^2}, \quad PF = \sqrt{(x_1 - k)^2 + y_1^2}, \quad DF' = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 + k,$$

$$DF = k - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 \text{ 를 } PF' : PF = DF' : DF \text{ 에 대입하여 정리하면}$$

$$\sqrt{(x_1 + k)^2 + y_1^2} : \sqrt{(x_1 - k)^2 + y_1^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 + k : k - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 \text{ 이다.}$$

이를 간단히 하면

$$\sqrt{(x_1 + k)^2 + y_1^2} : \sqrt{(x_1 - k)^2 + y_1^2} = a^2 + kx_1 : a^2 - kx_1$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + k^2 + y_1^2 - 2kx_1)(k^2 x_1^2 + a^4 + 2ka^2 x_1) = (x_1^2 + k^2 + y_1^2 + 2kx_1)(k^2 x_1^2 + a^4 - 2ka^2 x_1)$$

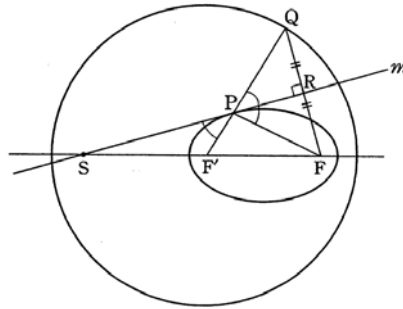
$$\Leftrightarrow a^2(x_1^2 + k^2 + y_1^2) = k^2 x_1^2 + a^4$$

$$\Leftrightarrow b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2 = 0 \text{ 이 되는데}$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 을 만족하므로 참임을 알 수 있다.

$PF' : PF = DF' : DF$ 이 성립하므로 위의 명제는 참이다. <증명 끝>

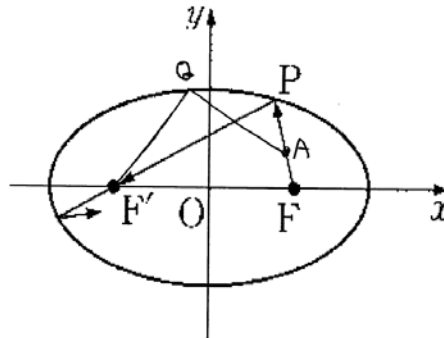
(증명2) 타원의 자취를 이용한 증명



원 F' 위의 점 Q , 원 내부의 임의의 점 F 에 대하여 선분 FQ 의 수직이등분선을 m 이라 하면 $PQ = PF$ ($\because \triangle QPR \equiv \triangle PFR$)이므로 $PF + PF'$ 는 원의 반지름으로 일정하다. 따라서 점 P 는 F, F' 를 두 초점으로 하는 타원 위의 점이다.

그림에서 $\angle F'PS = \angle FPR$ 이 성립하므로 타원의 한 초점에서 출발한 빛은 다른 초점을 향해 반사함을 알 수 있다. <증명 끝>

(증명3) 빛이 균일한 매질을 통과할 때에는 최단거리 경로를 따라 진행된다는 성질을 이용한 증명



타원 안의 임의의 점을 A 라 하면 A 에서 타원 위의 임의의 점 Q 를 지나 초점 F' 에 이르는 거리 즉, $QA + QF'$ 의 최솟값이 $PA + PF'$ 임을 보이면 된다.

타원의 정의에 의해

$$PF + PF' = QF + QF' \text{ 이고}$$

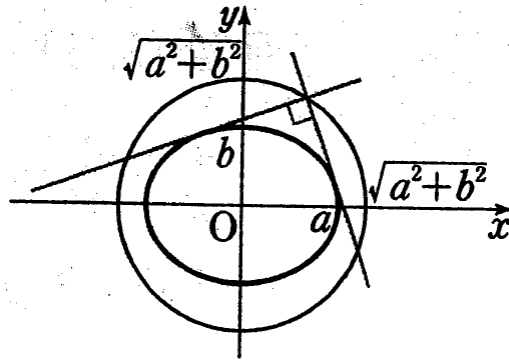
$$QF + QF' \leq QA + AF + QF' \quad \dots (1)$$

$$PF + PF' = PA + AF + PF' \quad \dots (2)$$

(1), (2)에서 $PA + AF + PF' \leq QA + AF + QF'$ 이 성립하므로 $PA + PF' \leq QA + QF'$ 이 성립한다. <증명 끝>

(2) 타원의 기하학적 특성 2

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 밖의 점에서 그은 두 접선이 수직인 점들의 자취는 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 이다.



(증명1)

타원 밖의 점을 $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 그 점을 지나는 직선의 방정식은 $y - y_1 = m(x - x_1)$ 이다.

이 직선이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하므로 대입한 후 정리하면 다음과 같다.

$$b^2 x^2 + a^2 (mx - mx_1 + y_1)^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$(a^2 m^2 + b^2)x^2 + 2a^2 m(-mx_1 + y_1)x + a^2 \{(-mx_1 + y_1)^2 - b^2\} = 0$$

$D/4 = 0$ 이므로

$$a^4 m^2 (-mx_1 + y_1)^2 - a^2 (a^2 m^2 + b^2) \{(-mx_1 + y_1)^2 - b^2\} = 0$$

이를 m 에 관하여 정리하면

$$(a^2 - x_1^2)m^2 + 2x_1 y_1 m + b^2 - y_1^2 = 0 \text{ 이 된다.}$$

두 직선의 기울기를 곱하면 -1 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\frac{b^2 - y_1^2}{a^2 - x_1^2} = -1$ 이 성립하고, 이

를 정리하면 $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$ 이 됨을 알 수 있다. 즉 $P(x_1, y_1)$ 는 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 인 원 위의 점들이다. <증명 끝>

(증명2)

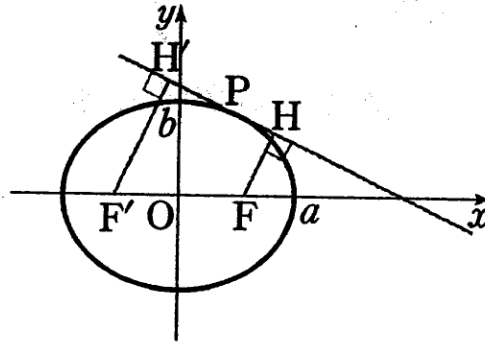
타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하는 두 접선의 기울기 중 하나를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \text{ 이다.}$$

점 $P(x_1, y_1)$ 를 접선 위의 한 점이라 하면 $y_1 = mx_1 \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ 이 성립하고, 이를 m 에 대해 정리하면 $(x_1^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + y_1^2 - b^2 = 0$ 이 된다. 두 직선이 수직일 때 $m_1 \cdot m_2 = -1$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\frac{y_1^2 - b^2}{x_1^2 - a^2} = -1$ 이 성립한다. 이를 정리하면 $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$ 이 됨을 알 수 있다. 즉 $P(x_1, y_1)$ 는 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 인 원 위의 점들이다. <증명 끝>

(3) 타원의 기하학적 특성 3

타원의 두 초점에서 타원에 접하는 직선까지의 거리의 곱은 일정하다.



(증명)

위의 그림에서 $HF \times H'F'$ 이 일정함을 증명하면 된다.

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 두 초점을 $F'(-k, 0)$, $F(k, 0)$, 타원 위의 점을 $P(x_1, y_1)$

라 하면, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ 이 성립하고 점 P 를 지나는 접선의 방정식은 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ 이다.

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0 \text{ 이고}$$

$$HF = \frac{|b^2(x_1 k - a^2)|}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}, \quad H'F' = \frac{|b^2(x_1 k + a^2)|}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}} \text{ 이므로}$$

$$HF \times H'F' = \frac{|b^4(x_1^2 k^2 - a^4)|}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} \text{ 이다.}$$

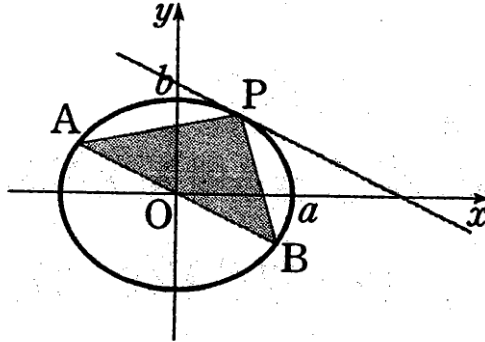
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ 에서 } y_1^2 = \frac{a^2 - x_1^2}{a^2} \times b^2, \quad k^2 = a^2 - b^2 \text{ 를 대입하면}$$

$$HF \times H'F' = \frac{|b^4(x_1^2 k^2 - a^4)|}{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2} = \frac{|b^4(a^2 x_1^2 - a^4 - b^2 x_1^2)|}{b^2(b^2 x_1^2 + a^4 - a^2 x_1^2)} = b^2$$

따라서 $HF \times H'F' = b^2$ 으로 일정하다. <증명 끝>

(4) 타원의 기하학적 특성 4

타원 위의 임의의 점 P 에서의 접선과 평행하고 원점을 지나는 직선이 타원과 만나는 두 점을 A, B 라 하면 $\triangle PAB$ 의 넓이는 일정하다.



(증명)

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 원점을 지나는 직선이 타원과 만나는 두 점을 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 원점을 지나고 점 P 를 지나는 직선을 l 이라 하자.

원점을 지나고 점 P 를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx$ 라 하면 직선 l 의 방정식은 $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ 중의 하나이다. 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 는 $y = mx$ 와 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 교점이므로 이를 연립

하여 풀면 $(a^2 m^2 + b^2)x^2 = a^2 b^2$ 이 되고 $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}$ 이다.

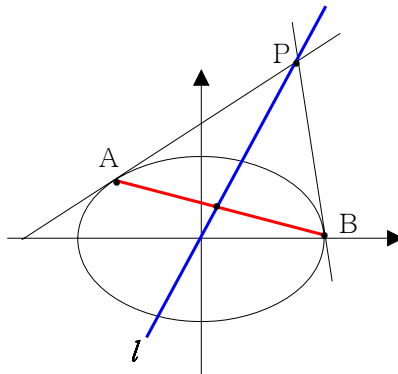
따라서 $AB = |x_2 - x_1| \sqrt{1 + m^2} = \frac{2ab \sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}$, 선분 AB 와 직선 l 사이의 거리는

$\frac{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}$ 이므로 $\triangle PAB$ 의 넓이 S 는 $S = \frac{1}{2} \times \frac{2ab \sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}} \times \frac{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}} = ab$ 가 되

어 일정하다. <증명 끝>

(5) 타원의 기하학적 특성 5

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 밖의 한 점 $P(x_1, y_1)$ 에서 두 접선을 그을 때, 두 접점 A, B 를 지나는 직선의 방정식(극선의 방정식)은 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 이다.



(증명)

A, B 의 좌표를 각각 $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 라 하면 두 점을 지나는 접선의 방정식은 각각

$$\frac{x_2x}{a^2} + \frac{y_2y}{b^2} = 1, \quad \frac{x_3x}{a^2} + \frac{y_3y}{b^2} = 1 \text{ 이다.}$$

그런데 점 P 는 두 접선의 교점이므로 $\frac{x_2x_1}{a^2} + \frac{y_2y_1}{b^2} = 1, \quad \frac{x_3x_1}{a^2} + \frac{y_3y_1}{b^2} = 1$ 이 항상 성립한다.

이는 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 이 항상 $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 를 지난다는 것을 의미한다.

따라서 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 는 두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식이다. <증명 끝>

(6) 타원의 기하학적 특성 6

기울기가 같은 직선에 의해 잘린 타원의 현의 중점은 타원의 중점을 지나는 직선 위에 있다.

(증명)

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 임의의 직선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하자.

타원과 직선의 교점을 구해야 하므로 두 방정식을 연립하면 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1$ 이고 이를

x 에 관하여 정리하면 $(a^2 m^2 + b^2)x^2 + 2a^2 mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0$ 이 된다. 두 교점의 x

좌표를 x_1, x_2 라 하면 $x_1 + x_2 = -\frac{2a^2 mn}{a^2 m^2 + b^2}$ 이 된다. 두 교점의 중점을 $P(x, y)$ 라 하

면 $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2 mn}{a^2 m^2 + b^2}$ 이고 이를 $y = mx + n$ 에 대입하여 정리하면

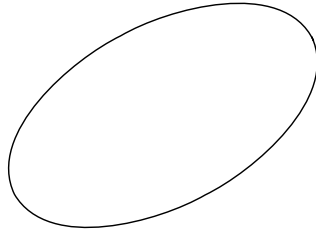
$y = \frac{b^2 n}{a^2 m^2 + b^2}$ 이다. x, y 의 관계식을 구하면 $y = -\frac{b^2}{a^2 m} x$ 이 된다. 여기서 구한 직

선 $y = -\frac{b^2}{a^2 m} x$ 에서 a, b, m 는 상수이므로 위의 직선은 n 의 값에 관계없이 일정한 직선

위에 있다고 할 수 있다. 즉, 현의 중점은 타원의 중점을 지나는 직선 위에 있게 된다. <증명 끝>

(7) 타원의 기하학적 특성 7

눈금 없는 자와 컴퍼스를 가지고 있을 때, 아래 그림과 같이 주어진 타원에서 타원의 중심, 타원의 장축과 단축, 그리고 초점을 작도할 수 있다.



① 타원의 중심

위의 결과(즉, “기울기가 같은 직선에 의해 잘린 타원의 현의 중점은 일정한 직선 위에 있다.”)를 이용하면 임의의 평행한 두 직선의 중점은 타원의 중심을 지난다고 할 수 있다. 따라서 두 쌍의 평행한 직선의 중점을 이으면 그 교점이 바로 타원의 중심이 된다.

② 장축과 단축

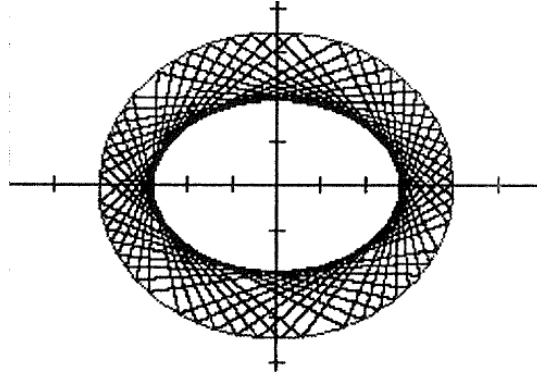
타원의 중심에 컴퍼스를 대고 타원과 네 점에서 만나도록 원을 그린다. 네 교점을 이으면 네 개의 현을 이루는데(타원의 중심을 지나지 않는 현은 제외한다.) 그 중 마주보는 두 개의 현은 서로 평행하다. 두 현의 중심을 이으면 각각 원점을 지나지 않는 직선을 얻을 수 있는데, 그 중 긴 것이 장축이고 짧은 것이 단축이 된다.

③ 초점

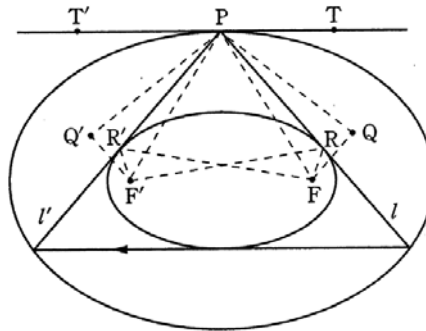
장축의 길이가 두 초점으로부터 거리의 합이 된다는 성질을 이용하면 된다. 타원의 중심에서 장축과 타원의 한 교점까지의 거리(이를 a 라 하자.)를 잰 후, 단축과 타원의 한 교점을 중심으로 반지름 a 인 원을 그리면 그 원과 장축의 교점이 바로 초점이 된다.

(8) 타원의 기하학적 특성 8

타원의 두 초점과 타원 사이에서 출발한 빛이 타원 위의 점에서 반사한 후 그리는 포락선(包絡線, envelope)¹⁾ 타원이다. 두 타원은 두 초점을 공유한다.



(증명)



위의 큰 타원의 두 초점을 F, F' 라 하고 타원 위의 한 점 P 에서 반사하는 빛의 경로를 l, l' 이라 하자. 그러면 두 초점을 공유하면서 직선 l 에 접하는 타원을 만들 수 있다. 그 타원을 T 라 하자. 그리고 큰 타원과 두 초점을 공유하면서 직선 l' 에 접하는 또다른 타원을 만들 수 있다. 그 타원을 T' 이라 하자. 만약 두 타원 T, T' 이 같다면 타원 위의 임의의 점으로 반사한 빛이 그리는 포락선은 하나의 타원임을 증명할 수 있다.

두 타원이 같다는 것을 보이기 위해 $FR + F'R = F'R' + F'Q'$ 임을 보이면 된다.

큰 타원과 초점을 공유하면서 직선 l 에서 접하는 작은 타원 위의 접점을 R , 점 F 를 직선 l 에 대해 대칭이동한 점을 Q 라 하면 $FR = RQ$ 이다. 그러면 $FR + F'R = RQ + F'R$ 이 성립한다. 그런데 직선 l 위의 임의의 점 S 에 대하여 $F'S + SF = F'S + SQ \geq FR + F'R = RQ + F'R$ 이 성립한다. 따라서 F', R, Q 는 일직선 위에 있게 된다.

$\therefore FR + F'R = RQ + F'R = F'Q$ 이다.

마찬가지 방법으로 생각하면 $FR' + F'R' = R'Q' + FR' = F'Q'$ 이 성립함을 알 수 있다.

1) 일정한 조건을 만족하는, 한 무리의 직선이나 곡선에 접하는 곡선. 예를 들면, 한 정점에서 거리가 같은 직선들의 포락선은 원이다.

이제, $F'Q = FQ'$ 임을 보이면 두 타원이 같은 타원임이 증명된다.

두 삼각형은 $\triangle PF'Q$, $\triangle PQ'F$ 는 SAS 합동이다.

왜냐하면 $PF' = PQ'$, $PF = PQ$, $\angle F'PQ = \angle Q'PF$ 이기 때문이다. $\angle F'PQ = \angle Q'PF$ 인 것은 위의 '타원의 기하학적 특성 1'의 "타원의 한 초점에서 출발한 빛은 타원 위의 한 점에서 반사한 후 다른 초점을 향해 진행한다."는 성질을 이용하여 증명된다. 그 성질에 의하면 $\angle T'PF' = \angle TPF$ 이고, l, l' 은 타원 위의 한 점을 지나는 빛의 경로이므로 $\angle T'PR' = \angle TPR$ 이므로 $\angle Q'PR' = \angle R'PF' = \angle F'PR = \angle RPQ$ 이 성립한다. 따라서 $\angle F'PQ = \angle Q'PF$ 이다.

$\triangle PF'Q = \triangle PQ'F$ 이므로 $F'Q = FQ'$

따라서 타원 위의 점에서 반사한 빛은 두 초점을 공유하는 작은 타원과 접하게 되고, 작은 타원과 큰 타원 사이를 끝없이 맴돌게 된다. <증명 끝>